数理解析研究所講究録
277巻 1976年 11-21



# 分割ゲームとConnex

阪大・理　山崎洋平

## まえがき．

ここに挙げる二つの対象「分割ゲーム」と「Connex」は共に，Hex（又はNash game）とBridg-itと呼ばれるゲームに起源をもっている．Hexは六角形を敷きつめた菱形の盤の上で，白黒二名の競技者が交互に自分の石を六角形の中に置いていくゲームである．盤の縁は

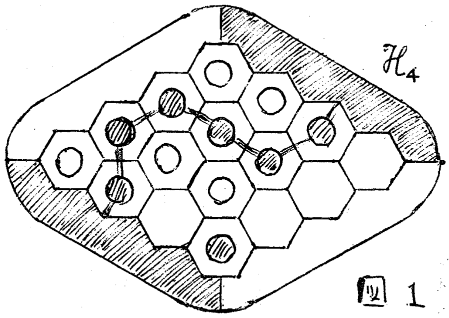


図1

あらかじめ対辺同志が同色になるように白黒に塗り分けられていて，図1のように両端の黒い辺を結ぶ黒石の列ができれば黒の勝ち，逆に白い辺を白石で結べば白の勝ちである．Bridg-itも同様のゲームであり，これらは次の二つの特性をもつ．

(1)．片方が“勝った”状態から，更にゲームを続けても相手は“勝った”状態に到達し得ない．

(2)．すべての空白が埋められた状態では必ず"勝者"が存在する．

この二つの性質を抽象化したのが分割ゲームで，前述した二つのゲーム及びその逆ゲーム（即ち，つないだら負けというゲーム）のゲーム理論はこの世界でまとめられる．Hex や Bridg-it には分割ゲームとしてのみならずグラフ理論的アプローチがあり，Shannon のゲームなるものが考案されているが，これを更に純粋にグラフとしてとらえたものが connex である。

## §1．分割空間（division space）．

二人の競技者 T と ⊥ からなる集合 $\Pi$ を固定する．$\Pi$ に，もう一つの元 $\theta$（nobody）をつけ加えた集合 $\bar{\Pi}$ を考える．

$X$ を有限集合とする．$X$ から $\bar{\Pi}$，$\Pi$ への写像の全体を，$\mathcal{P}_X$，$\mathcal{D}_X$ と書きそれぞれの元 $\partial$，$\delta$ を <u>position</u>，<u>division</u> という．前者はゲームが進行している途中の盤の状態を，後者は終了時の状態を表すと解釈する．$\mathcal{D}_X \times \Pi$ から $\{-1, 1\}$ への写像 $\chi^*$ で $\sum_{\pi \in \Pi} \chi^*(\delta, \pi) = 0 \quad (\forall \delta \in \mathcal{D}_X)$ をみたすものを <u>judge</u> という．分割 $\delta$ が生じたとき競技者 $\pi$ は $\chi^*(\delta, \pi)$ が 1 であるか -1 であるかによって勝者，敗者と解釈される．$\mathscr{D}^* = (X, \chi^*)$ は <u>division space</u> と呼ばれる．

$\mathscr{D}^* = (X, \chi^*)$ を division space とする．$X$ の元 $x$ は，固定

された競技者$\pi$について，$D_1^{-1}(\pi) = D_2^{-1}(\pi) \cup \{X\}$をみたす任意のdivisionsの組$(D_1, D_2)$に対して次の条件$(+)$, $(-)$, $(0)$をみたすときそれぞれ<u>regular</u>, <u>misère</u>, <u>negligible</u>であるという：

$$(+) \qquad \chi^*(D_1, \pi) \geqq \chi^*(D_2, \pi)$$

$$(-) \qquad \chi^*(D_1, \pi) \leqq \chi^*(D_2, \pi)$$

$$(0) \qquad \chi^*(D_1, \pi) = \chi^*(D_2, \pi).$$

division space $\mathcal{D}^*$は，すべての点がregular, misère, negligibleのとき，それぞれ<u>regular</u>, <u>misère</u>, <u>trivial</u>であるという．これらの場合，記号$*$は$+$, $-$, $0$で置きかえられ$\mathcal{D}^+ = (X, \chi^+)$のように書かれるものとする．古典的なゲームはすべてregularで，その逆ゲームはmisèreである．

division spaces $\mathcal{D}_i^* = (X_i, \chi_i^*)$ $i = 1, 2$に対し，$X_1$から$X_2$への写像$f^X$と$\Pi$の置換$\mathrm{sgn}\, f$の組$f$が$\mathcal{D}_1^*$から$\mathcal{D}_2^*$への<u>pseudo-homomorphism</u>であるとは

$$\begin{tikzcd}
f^{\mathcal{D}} \times \mathrm{sgn}\, f : \mathcal{D}_1 \times \Pi \arrow[dr, "\chi_1^*"'] & & \mathcal{D}_2 \times \Pi \arrow[ll] \arrow[dl, "\chi_2^*"] \\
& \{-1, 1\} &
\end{tikzcd}$$

なる図式が可換なることをいう．ここに$f^{\mathcal{D}}$は$f^{\mathcal{D}}(D_2) = \mathrm{sgn}\, f \circ D_2 \circ f^X$によって与えられる．-immersion, -isomprphism, -automorphism

なども同様に定義される．特に $\mathrm{sgn}\, f = \mathrm{id}_{\Pi}$ のとき pseudo－は略され，$\mathrm{sgn}\, f = \wedge$ （$\Pi$ の involution）のときは anti－でおきかえられる．division space $\mathcal{D}^*$ に対し，pseudo－automorphism の全体 $\mathrm{Aut}\,\mathcal{D}^*$ は自然に群をなし，automorphism の全体 $\mathrm{Aut}_{\Pi}\,\mathcal{D}^*$ は指数1又は2の正規部分群をなす。この指数が2のとき $\mathcal{D}^*$ は impartial（公平）であるといわれ，特に $(\mathrm{id}_X, \wedge)$ が $\mathrm{Aut}\,\mathcal{D}^*$ の元であるとき perfect であるといわれる．

## §2．分割ゲーム

$\mathcal{D}^* = (X, \chi^*)$ を division space とする．$\{1, 2, \cdots |X|\}$ から $\Pi$ への写像 $a$ を $\mathcal{D}^*$ 上の assignment という．$\Gamma = (\mathcal{D}^*, a)$ を分割ゲームという．分割ゲーム $\Gamma$ は次のように競技される．競技は $|X|$ 回の move によって進められ，各 $i$ 回目に競技者 $a(i)$ が，それ以前に占領されていない点を一つ占領し，その結果競技者 $\pi$ の占領した区域が $D(\pi)$ となれば $\chi^*(D, \pi)$ の値によって勝敗を定める．

このゲームは有限ゲームの一般論から，必勝な競技者をもつ。従って次の関数 $\omega^+$, $\omega^-$ が定義される：

$$\omega^+(\Gamma, \pi) = -\,\omega^-(\Gamma, \pi) = \begin{cases} 1 & \cdots\cdots \text{必勝} \\ -1 & \cdots\cdots \text{必敗}. \end{cases}$$

分割ゲームのゲーム理論はこの関数の値を種々のゲームの間で比較することによって得られるが，ここでは，それらの結合によって得られる二三の命題を挙げるにとどめる。次の定理はその中で主をなすものである。

定理．$\mathcal{D}^{\pm}$を regular（又は misère）且つ impartial な division space とし，$a$をある自然数$p$について$2 \cdot p^{\pm}$-周期的な$\mathcal{D}^{\pm}$上の assignment とする。このとき

$$\omega^{\pm}(\mathcal{D}^{\pm}, a, \pi_{\pm}(a)) = 1$$

である。ここに複号は一斉に同じものをとるものとし，"$2p^{\pm}$-周期的，$\pi_{\pm}(a)$"は次のように定義される：

$$(+) \quad \begin{cases} a(i) = a(i') & \text{iff} \quad \left[\frac{i-1}{p}\right] \equiv \left[\frac{i'-1}{p}\right] \mod 2 \\ \pi_{+}(a) = a(1) & \end{cases}$$

$$(-) \quad \begin{cases} a(i) = a(i') & \text{iff} \quad \left[\frac{N-i}{p}\right] \equiv \left[\frac{N-i'}{p}\right] \mod 2 \\ \pi_{-}(a) = a(|X|) & \end{cases}$$

この定理は次の例にみるように，ある意味で best possible である。

例．Hex は regular 且つ impartial である．特に長さ 4 の場合（六角形が 16 個），次のような assignment は各$n$について$\#\{i \le n \mid a(i) = \perp\} \geqq \#\{i \le n \mid a(i) = \top\}$であるが$\omega^{+}(\Gamma, \perp) = -1$である．これは，よく碁で先手の有利さを説明するのに用いられるある論法が実は当を得ていないことを示している．

$$a(i) = \perp \quad \text{iff} \quad i = 1, 2, 3;\ 7, 9, 11, 13, 15.$$

この例では $|X|$ は16である．$|X|$ が最小であるのは6のときで，本質的には唯一つの例をもつ．この事実が何を意味するか考えるのが本稿のテーマである．

補題．$\mathcal{D}^* = (X, \mathcal{X}^*)$ を division space, $a$, $a'$ を $\mathcal{D}^*$ 上の assignments とする．今自然数 $n\ (\leq |X|)$ が存在して

$$a'(i) = \begin{cases} a(i) & i < n \\ a(|X|) & i = n \\ a(i-1) & i \geqq n \end{cases}$$

が成立しているとする．このとき次の不等式が成立する：

$$\omega^+(\mathcal{D}^*, a, \pi_-(a)) \leq \omega^+(\mathcal{D}^*, a', \pi_-(a)).$$

次の定理は，特殊な場合の証明を組織だった方法で改良できることを永尾先生から示唆されて，一般的に成立することを確信し証明したものである．

定理．$a_0$ を $\{1, \cdots, 2l\}$ ($l$ は整数) から $\Pi$ への写像で $|a_0^{-1}(\pi)| = l$ をみたすものとする．このとき自然数 $N$ が存在して，$N$ より大きい $n$ に対し次のような写像 $a$ を作るとき，$|X| = 2(l+n)$ なる (regular) impartial division space $\mathcal{D}^* = (X, \mathcal{X}^*)$ に対し

$$\omega^+(\mathcal{D}^*, a, \perp) = 1$$

である。ここに $a$ は次の式で与えられるものとする：

$$a(i) = \begin{cases} \perp & i \le n \\ a_0(i-n) & n < i \le n+2l \\ \top & n+2l < i. \end{cases}$$

特に $l = 2$, $a_0(i) = \perp \iff i = 1, 4$ のとき、$N = 2$ とおくと上の式をみたしている。$n = 1$ の場合、$|X| = 6$ なる impartial division space $\mathcal{D}^* = (X, \chi^*)$ で $\omega^+(\mathcal{D}^*, a, \perp) = -1$ となるものに対しては次にあげる $\chi_0^*$ と $X$ の置換 $\sigma$ によって

$$\chi^*(\delta, \pi) = \chi_0^*(\delta \circ \sigma, \pi) \qquad \forall \delta \in \mathcal{D}_X \text{ s.t. } |\delta^{-1}(\pi)| = 3$$

となる。また、この $\chi_0^*$ に対し $\mathcal{B}_\perp = \{B \subset X \mid |B| = 3, \chi_0^*(\delta, \perp) = 1, \delta^{-1}(\perp) = B\}$ とおくと $(X, \mathcal{B})$ は 2-design を与える。

$X$：正20面体の10対の,対頂点の組

$\chi_0^*(\delta, \pi) = -1 \iff \delta^{-1}(\pi)$ が,向かい合った三角形の対の中におさまる。

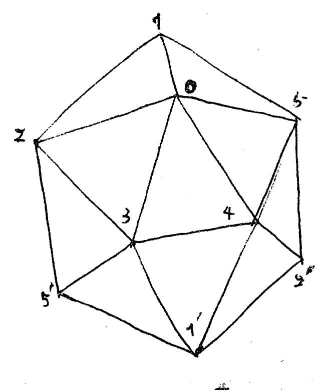


図2

これが前述した最小の反例である。

## §3. Nonsingular G-connex

{e}でない有限群 $G$ を固定する。$\tilde{X}$ を有限集合とし，$G$ がその上に作用していて，単位元以外は不動点をもたないものとする．orbit space $G\backslash\tilde{X}$ を簡単の為 $X$ と書くことにする．
$\tilde{\Phi}: \tilde{X}\times\tilde{X}\times\Pi \longrightarrow \{0,1\}$，$\chi^+$: $X$ 上の regular judge に対し，$\tilde{\mathcal{E}} = (\tilde{X}, \tilde{\Phi}, \chi^+)$ が <u>nonsingular G-connex</u> であるとは，次の5つの条件をみたすことをいう：

i) $\tilde{\Phi}(\tilde{x}, \tilde{x}, \pi) = 1$

ii) $\tilde{\Phi}(\tilde{y}, \tilde{x}, \pi) = \tilde{\Phi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \pi)$

iii) $\tilde{\Phi}(g(\tilde{x}), g(\tilde{y}), \pi) = \tilde{\Phi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \pi)$

iv) $\chi^+(\mathfrak{D}, \pi) = 1 \iff \chi^+|\mathfrak{D}_X\times\{\pi\} = 1$ 又は
$\tilde{\Phi}|\tilde{X}\times\tilde{X}\times\{\pi\}$ に関する $(\mathfrak{D}\circ G\backslash)^{-1}(\pi)$ の連結成分 $A$ が
存在して $g(A) = A \quad \forall g\in G$

v) $\chi^+(\mathfrak{D}, \pi) = -1 \iff \chi^+|\mathfrak{D}_X\times\{\pi\} = 1$ ではなくて，
$\tilde{\Phi}|\tilde{X}\times\tilde{X}\times\{\pi\}$ に関する $(\mathfrak{D}\circ G\backslash)^{-1}(\pi)$ の連結成分 $A$ に
対しては $g(A)\cap A = \phi \quad \forall g\neq e$.

nonsingular G-connex についても <u>pseudo-homomorphism</u> 等が定義され，<u>impartial</u>，<u>perfect</u> などの概念も自然に導入される．nonsingular G-connex $\tilde{\mathcal{E}}$ は自然に regular division space $\tilde{\mathcal{E}}^+$ を導くが，上記の概念はすべて $\tilde{\mathcal{E}}$ から $\tilde{\mathcal{E}}^+$ へ遺伝する．$\tilde{\mathcal{E}}$ は，

$\mathrm{Aut}\,\tilde{\mathcal{E}}$ から $\mathrm{Aut}\,\mathcal{E}^+$ への自然な群準同型写像が onto であるとき faithfull であるという.

前節の最後に挙げた例は一つの nonsingular $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-connex を与えているが, Hex もその一例と考えられることが, のちに明らかにされる. 一般に nonsingular $G$-connex が与えられたとき $|G|$ の素因子 $p$ に対し, 同じ division space を生じるような $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-connex が自然に構成されるが, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の場合 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ connex で表せないような division space が生じるようなものが存在するかどうか不明である. 蛇足ながら nonsingular $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ connex ($p$: prime) の定義には v) の条件は不要である. また, 巡回群でない $G$ に対しては次の定理が成立する.

定理. $G$ が巡回群でないとする. このとき nonsingular $G$-connex $\tilde{\mathcal{E}}=(\tilde{X},\tilde{\Phi},\mathcal{X}^+)$ に対し次の評価式が成立する.

$$|X-X^0|\leq 4,$$

ここに $X^0$ は $\mathcal{E}^+=(X,\mathcal{X}^+)$ の negligible points の集合である.

## §4. Spherical $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-connex

この節では nonsingular $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-connex の例を多く作る手段を考える. これは, 2節の末尾の例の拡張である. $S^2$ を $\{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3 \mid u^2+v^2+w^2=1\}$ のことを意味するものとし, $\alpha$ を $S^2$ の antipodal map とし $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を $\langle\alpha\rangle$ と同一視する. このとき:

定理．$\mathcal{K}=(K^0, K^1, K^2)$ を $S^2$ の simplicial decomposition で $\alpha(K^i)=K^i$ $\forall i$ をみたすものとする．このとき次の $\tilde{\mathcal{C}}=(\tilde{X}, \tilde{\Phi}, \chi^+)$ は nonsingular $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-connex である．

$$\tilde{X}=K^0$$

$$\tilde{\Phi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \pi)=1 \iff \exists k^1 \in K^1,\ \tilde{x}, \tilde{y} \in k^1$$

$$\chi^+(b, \pi)=1 \iff \exists A : \tilde{\Phi}\text{-connected component of } (b \circ G)^{-1}(\pi)$$

$$\text{s.t.}\quad \alpha(A)=A.$$

この方法で得られるものを $\mathcal{K}$ から導かれる <u>initial spherical $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-connex</u> という．$\partial$ を X 上の position とするとき上の nonsingular $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-connex から自然に得られる nonsingular $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-connex $\tilde{\mathcal{C}}_\partial$ を考える．この種のものを <u>spherical $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-connex</u> という．

Hex は下の図に描くように spherical $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-connex として実現できる．

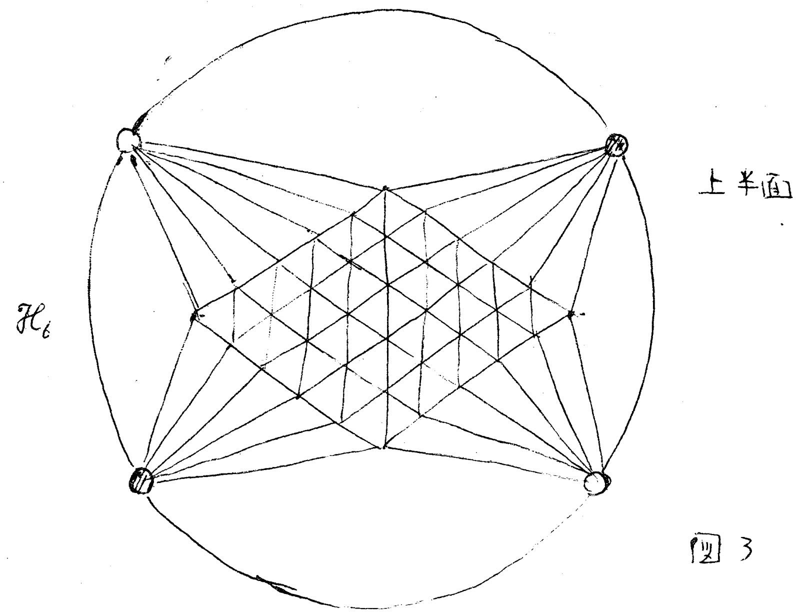


図 3

## §5. まとめ

今までに、division space, spherical $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-connex, nonsingular G-connex を定義したが、これらが少しづつ広さの異った範囲をもつことを例で示そう。$\mathcal{D}_{2n+1}^{+}$ をここでは次のように定める：

$$|X_{2n+1}| = 2n+1$$

$$\chi^{+}(\delta,\pi) = 1 \iff |\delta^{-1}(\pi)| \geq n+1.$$

$2n+1 = 1, 3$ のときは spherical であり、5のときは nonsingular $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-をもつが、spherical ではない。7のときは nonsingular G では表現できない。

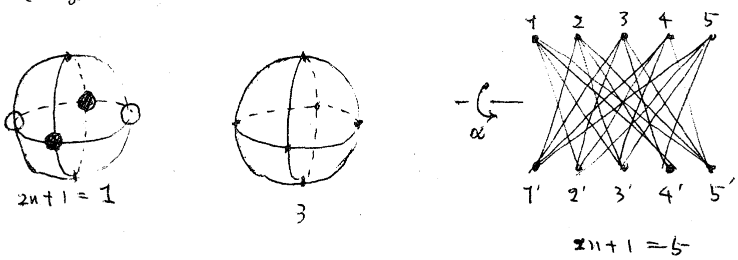

図4

注 connex が spherical であるということは必ずしも $\underline{\tilde{\Psi}}|\hat{X}\times\tilde{X}\times\{\pi\}|$ が平面グラフであることを意味しない。

### 参考文献

[1] 山崎洋平　Hex (= Nash game) の一般化 ——その理論と実例　数理解析研究所講究録 263

[2] 〃　ヘックス（ナッシュゲーム）のはなし　数理科学 1976. 1. 5 月号

[3] Y. Yamasaki　Theory of division games　J. of Combinatorial Theory (投稿中)